Date : **Q1** **Durée : 60 minutes**

Nom :	Prénom :	Classe :

Total : ..../ 40 (A)

Contrôle n°4 : Calcul de primitives et d'intégrales définies

1 # Calculer les primitives suivantes (primitives immédiates, par substitution ou par parties) :

Simplifier au maximum les expressions trouvées ;

A : / 20

1) $\int \frac{12}{5} x^5 - 2x^3 + 10x - 13 \; dx = \frac{\cancel{12}^{2} \cdot x^6}{5 \cdot \cancel{6}} - \frac{\cancel{2} x^4}{\cancel{4}_2} + \frac{\cancel{10}^{5} x^2}{\cancel{2}} - 13x + k$

$= \frac{2x^6}{5} - \frac{x^4}{2} + 5x^2 - 13x + k$

2) $\int \frac{4}{(2x-3)^5} dx = 4 \int t^{-5} \frac{dt}{2} = \frac{\cancel{4}}{2} \frac{t^{-4}}{-\cancel{4}} + k$

$t = 2x - 3$

$dt = 2\,dx$

$\frac{dt}{2} = dx$

$= \frac{-1}{2t^4} + k$

$= \frac{-1}{2(2x-3)^4} + k$

3) $\int \frac{x^2+1}{x^3+3x} dx = \int \frac{1}{t} \frac{dt}{3} = \frac{1}{3} \ln(|t|) + k$

$= \frac{\ln(|x^3+3x|)}{3} + k$

$t = x^3 + 3x$

$dt = 3x^2 + 3 \; dx$

$\frac{dt}{3} = x^2 + 1 \; dx$

4) $\int \sqrt{x-1} \cdot (3x+5) \; dx = (3x+5) \cdot \frac{2}{3} \cdot (x-1)^{\frac{3}{2}} - \int \cancel{3} \cdot \frac{2}{\cancel{3}} \cdot (x-1)^{3/2} + k$

(par parties)

$f(x) = 3x+5$	$f'(x) = 3$
$g'(x) = \sqrt{x-1} = (x-1)^{1/2}$	$g(x) = \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}$

$= \frac{2}{3}(3x+5) \cdot \sqrt{(x-1)^3} - 2 \int (x-1)^{\frac{3}{2}} + k$

$= \frac{2}{3}(3x+5)\sqrt{(x-1)^3} - 2 \frac{(x-1)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + k$

$= \frac{2}{3}(x+5)\sqrt{(x-1)^3} - \frac{4}{5}\sqrt{(x-1)^5} + k$

5) $\int (x-4) \sin(3x) \; dx = -\frac{(x-4) \cdot \cos(3x)}{3} - \int -\frac{\cos(3x)}{3} dx$

(par parties)

$f(x) = x-4$	$f'(x) = 1$
$g'(x) = \sin(3x)$	$g(x) = \frac{-\cos(3x)}{3}$

$= -\frac{(x-4)\cos(3x)}{3} + \frac{1}{3} \int \cos(3x) dx$

$= -\frac{(x-4)\cos(3x)}{3} + \frac{1}{3} \frac{\sin(3x)}{3} + k$

$= -\frac{(x-4)\cos(3x)}{3} + \frac{\sin(3x)}{9} + k$

$\int \sin(3x) \, dx = \int \sin(t) \frac{dt}{3}$

$= \frac{-\cos(t)}{3} (+k)$

$= \frac{-\cos(3x)}{3} (+k)$

$t = 3x$

$dt = 3\,dx$

$\frac{dt}{3} = dx$

Rem : $\int \cos(3x) dx = \int \cos(t) \frac{dt}{3}$

$t = 3x$

$dt = 3\,dx$

$\frac{dt}{3} = dx$

$= \frac{1}{3} \int \cos(t) dt$

$= \frac{1}{3} \sin(t) + k$

$= \frac{1}{3} \sin(3x) + k$

2 # Calculer les intégrales définies suivantes :

A : / 20

1) $\int_{3}^{5} \frac{2}{1-x}\,dx = 2\cdot\int_{-2}^{-4} \frac{1}{t}\,(-dt)$

$t = 1-x$

$dt = -dx$

$x = 3 \to t = 1-3 = -2$

$x = 5 \to t = 1-5 = -4$

$= -2\int_{-2}^{-4} \frac{1}{t}\,dt$

$= -2\left[\ln(|t|)\right]_{-2}^{-4}$

$= -2\left[\ln(|-4|) - \ln(|-2|)\right]$

$= -2(\ln(4) - \ln(2)) \simeq -1,386$

2) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x)\cdot\sin(x)\,dx = \int_{1}^{0} t^3\cdot(-dt)$

$t = \cos(x)$

$dt = -\sin(x)\,dx$

$-dt = \sin(x)\,dx.$

$x = 0 \to t = \cos(0) = 1$

$x = \frac{\pi}{2} \to t = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$

$= -\int_{1}^{0} t^3\,dt$

$= -\left[\frac{t^4}{4}\right]_{1}^{0} = -\left[0 - \frac{1}{4}\right] = \frac{1}{4}$

3) $\int_{0}^{3} \frac{6x}{\sqrt{x^2+3}}\,dx = 6\cdot\int_{3}^{12} \frac{1}{\sqrt{t}}\,\frac{dt}{2} = \frac{6}{2}\int_{3}^{12} t^{-1/2}\,dt$

$t = x^2+3$

$dt = 2x\,dx$

$\frac{dt}{2} = x\,dx$

$x = 0 \to t = 0^2+3 = 3$

$x = 3 \to t = 3^3+3 = 12$

$= 3\left[\frac{t^{1/2}}{1/2}\right]_{3}^{12}$

$= 6\left[\sqrt{12} - \sqrt{3}\right]$

$= 6\left[2\sqrt{3} - \sqrt{3}\right]$

$= 6\cdot\sqrt{3} \simeq 10,392$

4) $\int_{-3}^{0} (x+3)\,e^{-x}\,dx = \left[-(x+3)\,e^{-x}\right]_{-3}^{0} - \int_{-3}^{0} -e^{-x}\,dx$

$f(x) = x+3$	$f'(x) = 1$
$g'(x) = e^{-x}$	$g(x) = -e^{-x}$

$= \left[-(x+3)\,e^{-x}\right]_{-3}^{0} + \int_{-3}^{0} e^{-x}\,dx$

$= \left[-(x+3)\,e^{-x}\right]_{-3}^{0} - \left[e^{-x}\right]_{-3}^{0}$

$\int e^{-x}\,dx = \int e^{t}(-dt)$

$t = -x$

$dt = -dx$

$-dt = dx$

$= -\int e^{t}\,dt$

$= -e^{t} + k$

$= -e^{-x} + k$

$= -3\cdot e^{-0} - \left[-\underbrace{(-3+3)}_{=0}\,e^{-(-3)}\right]$

$- \left[e^{-0} - e^{-(-3)}\right]$

$= -3\cdot 1 - 0 - \left[1 - e^3\right]$

$= e^3 - 3 - 1 = e^3 - 4$

$\simeq 16,0855$